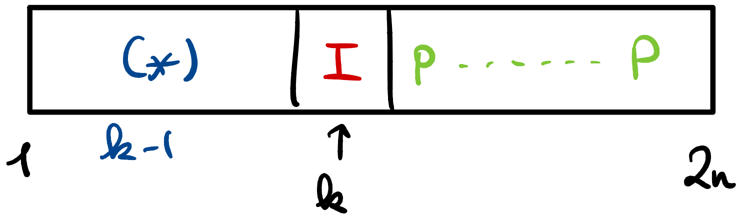
CORRIGÉ TD PROBAS

9

3 X : rang du dernier impair obtenu, moment où il ne reste que des pairs (on fait 2n tirages sans remise ici)

$(X=k)$ correspond à



Soit $k \in [\![n, 2n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)|\Omega| = \binom{k-1}{n-1}$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

d'où
$$E(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} k\binom{k-1}{n-1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \times \sum_{k=n}^{2n-1} n\binom{k}{n}$$

$$= \frac{n}{\binom{2n}{n}} \times \binom{2n}{n+1} \boxed{= \frac{n}{n+1}}$$

11

1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(X_i \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = p \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$
$$= 1-(1-p)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_i > n) = 1 - (1-(1-p)^n) = (1-p)^n.$$

2) $\mathbb{P}(V>k) = \mathbb{P}(X_1>k)\,\mathbb{P}(X_2>k)$ par indépendance

$= q^{2k}$ d'où $V \sim \mathcal{G}(1-q^2)$

$\mathbb{P}(U \leq k) = (1-q^k)^2 = \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k)$

$\mathbb{P}(U=k) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2.$

U et V ne sont pas indépendants. $(U=1 \quad V \geq 2)$

$$\forall (j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(U=j, V=k) = \begin{cases} 0 \text{ si } j<k \\ \mathbb{P}(X_1=k, X_2=k) = (pq^{k-1})^2 \quad \text{si } j=k \\ \mathbb{P}(X_1=k, X_2=j) + \mathbb{P}(X_1=j, X_2=k) \\ \quad = 2p^2 q^{j+k-2} \quad \text{si } j>k \end{cases}$$

3) $U+V = X_1+X_2$. $G_{U+V}(t) = G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2$

$$\mathbb{E}(U+V) = \frac{2}{p}.$$

4) $\mathbb{P}(Y>n) = \mathbb{P}(\forall i \in [\![1,N]\!], X_i > n)$ $\qquad (X_i) \sim \mathcal{G}(p_i)$

$$= \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i > n) = \prod_{i=1}^{N} q_i^{\,n}$$

d'où $\boxed{Y \sim \mathcal{G}\left(1 - \prod_{i=1}^{N} q_i\right)}$

5) X_i i.i.d $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$. $Z_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

$$\mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \leq k\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq k) = \prod_{i=1}^{n} (1-q^k)$$
$$= (1-q^k)^n$$

d'où
$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - \mathbb{P}(Z_n \leq k)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (1-q^k)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} q^{kj} (-1)^{j+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{kj}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{n}{j}(-1)^{j+1}}{1-q^j}$$

À k fixé, $\mathbb{P}(Z_n \leq k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\mathbb{P}(Z_n > k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Par (a), on montre aisément $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

12

1) $\mathbb{P}(T_2 = 2 \mid T_3 = 3) = 1$
$\mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{r-1}{r}$ } pas d'indépendance.

2) $Y_i = T_i - T_{i-1}$

$\mathbb{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t) \Rightarrow$ on veut piocher des cartes déjà obtenues pendant $k-1$ tours, puis une nouvelle carte au $k^{\text{ème}}$.

$$X_{t+1}(\omega) \in \underbrace{\{X_1(\omega), \dots, X_t(\omega)\}}_{\text{cardinal } i-1}$$
$$\vdots$$
$$X_{t+k-1}(\omega) \in \{X_1(\omega), \dots, X_t(\omega)\}$$
$$X_{t+k}(\omega) \in \{\text{———}\}$$

d'où $\mathbb{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t) = \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{i-1}{r}\right)$

Ainsi $\mathbb{P}(Y_i = k) = \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{i-1}{r}\right)$ ne dépend pas de t

d'où $Y_i \sim \mathcal{G}\left(1 - \frac{i-1}{r}\right)$.

3) $T = T_r = \sum_{i=1}^{r} Y_i + \underbrace{T_0}_{=0}$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{i-1}{r}} = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r-i+1}$$
$$= r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} = rH_r \sim \boxed{r\ln(r)}$$

(16)

1) $J_n = \left(\mathbb{1}_{i+j=n}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

D'après le cours de réduction, $Sp(J_n) = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$

<u>Vecteur propre</u> : $\begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix}$ associé à la vp ω^k.

2) $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} J_n^k x_k$ diagonalisable

<u>VP</u> : $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} x_j$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. $(n \in \mathbb{P})$

si $k \neq 0$, on revient au cas $k=1$ car $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^* = k\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$

$X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ annule donc M, et a ω comme racine.

Donc si $\pi_\omega = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ irréductible, $\deg(\pi_\omega) = n-1$.

d'où $\dim \mathbb{Q}[\omega] = n-1$.

Si $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[\omega] \\ \sum y_j X^j \mapsto \sum y_j \omega^j \end{cases}$ est de rang $n-1$ donc $\dim \ker \varphi = 1$.

De +, $\varphi\left(\sum_{j=0}^{n-1} X^j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j = 0$ donc au final

$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk} x_k = 0$ <u>ssi</u> ils valent tous -1 ou 1

<u>Si n impair</u>, $\sum_{i=1}^{n} \overset{1 \text{ ou } -1}{x_i} \neq 0$.

donc $2^n - 2$ matrices inversibles.

$$\boxed{\mathbb{P}(A \in GL_n(\mathbb{R})) = \frac{2^n - 2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

<u>Si n=2</u>,

$$X_0 + X_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \text{ et } 1 \\ 1 \text{ et } -1 \end{cases} \text{ possible}$$

donc $\dfrac{(2^2-2)-2}{2} = 0$

18

$E_n = \{P \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaire de degré $n\}$. On a $|E_n| = p^n$.

P_n, Q_n i.i.d, $P \sim \mathcal{U}(E_n)$.

Posons $C_n = |\{(P,Q) \in E_n^2 \mid P \wedge Q = 1\}|$ et $\mathbb{P}(P_n \wedge Q_n = 1) = \frac{C_n}{|E_n|^2}$.

Idée similaire : $\sum_{\substack{(p,q) \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$. (exo du TD 1)

$$E_n \times E_n = \biguplus_{k=0}^{n} \biguplus_{D \in E_k} \{(P,Q) \in E_n \times E_n \mid P \wedge Q = D\}$$

$$= \biguplus_{k=0}^{n} \biguplus_{D \in E_k} \{(DP_0, DQ_0) \mid (P_0, Q_0) \in E_{n-k} \times E_{n-k},\ P_0 \wedge Q_0 = 1\}$$

$$\Rightarrow |E_n|^2 = \sum_{k=0}^{n} |E_k| C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k |E_{n-k}|.$$

ie $p^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_k p^{n-k} \Rightarrow p^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{p^k}$.

donc $\frac{C_n}{p^n} = p^n - p^{n-1}$

d'où $q_n = \frac{p^{2n}(1-\frac{1}{p})}{p^{2n}} \boxed{= 1 - \frac{1}{p}}$

37 et 38

Voir le Delaunay. (Algèbre, page 431).